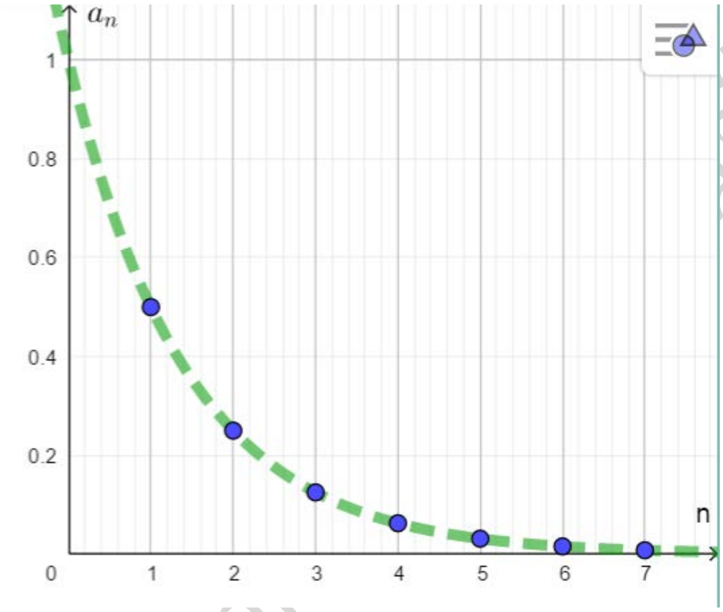
ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์

1.1 ลิมิตของลำดับ

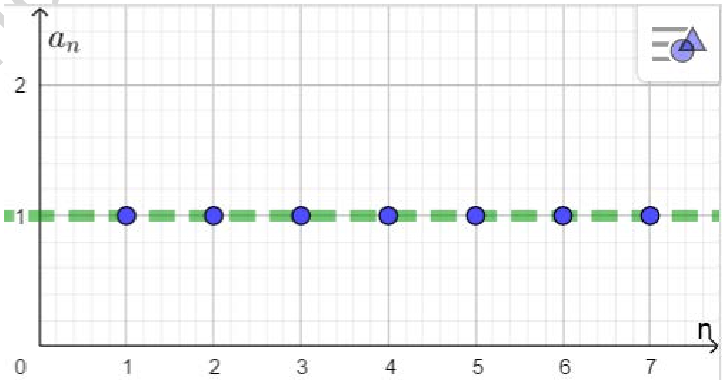
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมบัติอย่างหนึ่งของลำดับอนันต์ ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการศึกษาคณิตศาสตร์ชั้นสูงขึ้นไป โดยจะพิจารณาพจน์ที่ n ของลำดับเมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด ดังตัวอย่าง

(1) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$



เส้นประที่ปรากฏในรูปกราฟของลำดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$ เป็นเส้นที่แสดงแนวของจุดในกราฟ เมื่อพิจารณาจากกราฟและตำแหน่งของพจน์ต่างๆ บนเส้นจำนวนจะเห็นว่าถ้า n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว a_n (พจน์ที่ n) จะมีค่าเข้าใกล้ 0

(2) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = 1$



เส้นประที่ปรากฏในรูปกราฟของลำดับ $a_n = 1$ เป็นเส้นที่แสดงแนวของจุดในกราฟ เมื่อพิจารณาจากกราฟและตำแหน่งของพจน์ต่างๆ บนเส้นจำนวนจะเห็นว่าถ้า n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว a_n (พจน์ที่ n) จะมีค่าเป็น 1 เสมอ สำหรับทุกค่าของ n

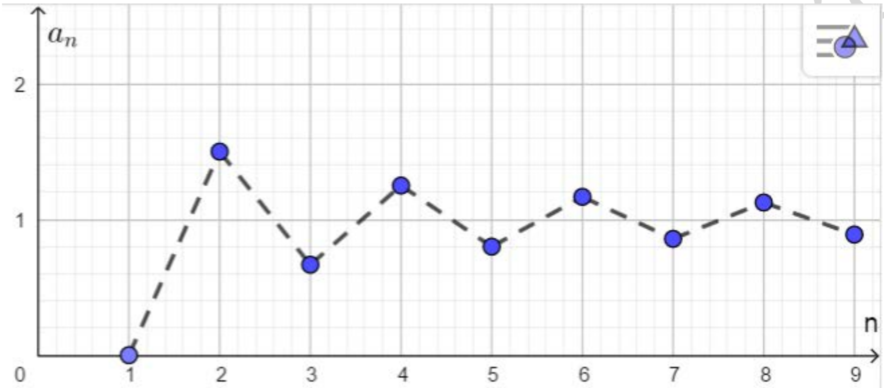
<u>ข้อตกลง</u> เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด และพจน์ที่ n มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับ<u>จำนวนจริง</u> L เพียง<u>จำนวนเดียว</u>เท่านั้นแล้ว จะเรียก L ว่า ***ลิมิตของลำดับ*** $(Limit\ of\ a\ sequence)$ และจะกล่าวว่าลำดับนั้นมีลิมิตเท่ากับ L

ดังนั้น ในตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า

ลำดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$ มีลิมิตเท่ากับ 0 และ ลำดับ $a_n = 1$ มีลิมิตเท่ากับ 1

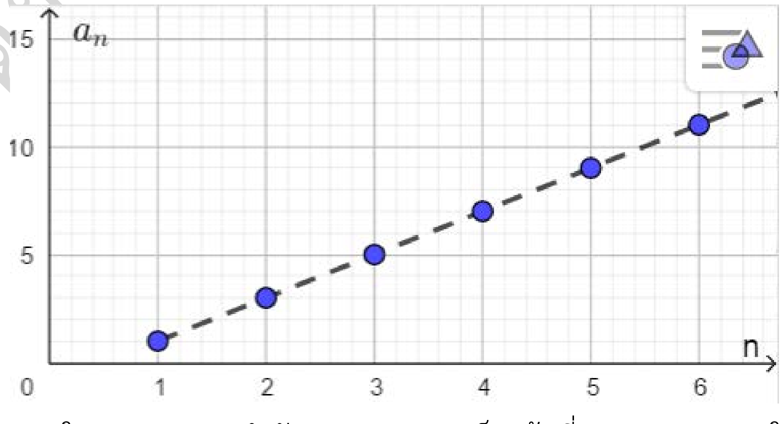
<u>ข้อตกลง</u> เราเรียกลำดับอนันต์ที่มีลิมิตว่า ***ลำดับคอนเวอร์เจนต์*** $(Convergent\ sequence)$ (ลำดับลู่เข้า)

(3) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$



เส้นประที่ปรากฏในรูปกราฟของลำดับ $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นเส้นที่แสดงแนวของจุดในกราฟ เมื่อพิจารณาจากกราฟและตำแหน่งของพจน์ต่างๆ บนเส้นจำนวนจะเห็นว่าถ้า n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว a_n (พจน์ที่ n) จะมีค่าเข้าใกล้ 1 ดังนั้น $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และมีลิมิตเท่ากับ 1

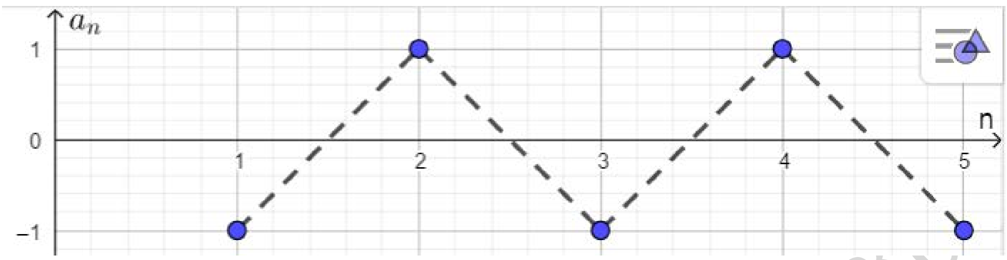
(4) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = 2n - 1$



เส้นประที่ปรากฏในรูปกราฟของลำดับ $a_n = 2n - 1$ เป็นเส้นที่แสดงแนวของจุดในกราฟ เมื่อพิจารณาจากกราฟและตำแหน่งของพจน์ต่างๆ บนเส้นจำนวนจะเห็นว่าถ้า n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว a_n (พจน์ที่ n) ของลำดับมีค่ามากขึ้นและไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง จึงกล่าวได้ว่าลำดับ $a_n = 2n - 1$ ไม่มีลิมิต ลำดับนี้จึงไม่ใช่ลำดับคอนเวอร์เจนต์

<u>ข้อตกลง</u> เราเรียกลำดับอนันต์ที่ไม่ใช่ลำดับคอนเวอร์เจนต์ ว่า ***ลำดับไดเวอร์เจนต์*** $(Divergent\ sequence)$ (ลำดับลู่ออก)

(5) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = (-1)^n$



เส้นประที่ปรากฏในรูปกราฟของลำดับ $a_n = (-1)^n$ เป็นเส้นที่แสดงแนวของจุดในกราฟ เมื่อพิจารณาจากกราฟและตำแหน่งของพจน์ต่างๆ บนเส้นจำนวนจะเห็นว่าถ้า n มีค่าเป็นจำนวนคี่แล้ว a_n มีค่าเป็น -1 แต่เมื่อ n มีค่าเป็นจำนวนคู่ แล้ว a_n จะมีค่าเป็น 1 ดังนั้น เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว พจน์ที่ n ของลำดับนี้จึงมิได้เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง ดังนั้น ลำดับ $a_n = (-1)^n$ จึงไม่มีลิมิต นั่นก็คือลำดับนี้เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

<u>ข้อสังเกตเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ</u>

1. ลำดับที่จะนำมาพิจารณาลิมิตนั้นต้องเป็นลำดับอนันต์
2. ถ้ากล่าวว่า L เป็นลิมิตของลำดับที่มีพจน์ที่ n เป็น a_n หมายถึง เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจะมีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับ<u>จำนวนจริง</u> L <u>จำนวนเดียวเท่านั้น</u> กล่าวได้ว่า L เป็นลิมิตของลำดับที่มีพจน์ที่ n เป็น a_n และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$
3. ลำดับที่มีลิมิตเรียกว่า ลำดับคอนเวอร์เจนต์ (ลำดับลู่เข้า)
4. ลำดับที่ไม่มีลิมิตเรียกว่า ลำดับไดเวอร์เจนต์ (ลำดับลู่ออก)
5. การพิจารณาว่าลำดับใดจะมีลิมิตหรือไม่นั้น อาจทำได้โดยการวาดกราฟของลำดับและพิจารณาตำแหน่งของพจน์ที่ n ของลำดับบนเส้นจำนวน เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่าลำดับ $a_n = \dfrac{1}{n}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือลำดับไดเวอร์เจนต์ และถ้าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ จงบอกด้วยว่าลิมิตของลำดับนี้เป็นเท่าใด

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

1.2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

การหาลิมิตของลำดับต่างๆ นอกจากจะหาได้โดยตรงจากการพิจารณากราฟของลำดับหรือตำแหน่งของพจน์ที่ n ของลำดับบนเส้นจำนวนแล้วอาจหาได้โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต ซึ่งจะกล่าวถึงและนำไปใช้โดยไม่มีการพิสูจน์

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ

ถ้า a_n และ b_n เป็นลำดับลู่เข้าและ c , k เป็นค่าคงที่แล้ว

1. limit แจกแจงได้ในเครื่องหมาย $+ , - , \times , \div$

 1.1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

 1.2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

 1.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

2. 2.1 $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

 2.2 $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

3. limit แจกแจงในเลขยกกำลัง และ ฟังก์ชันต่างๆ ได้

 3.1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^k = \left[\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)\right]^k$

 3.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$

 3.3. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$

4. 4.1 $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$ เมื่อ $|c| < 1$

 4.2 $\lim\limits_{n\to\infty} c^n =$ มากจนหาค่าไม่ได้ เมื่อ $|c| > 1$

 4.3 $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$

5. ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = A$ เมื่อ A คือค่าคงที่

6. 6.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$

 6.2 $\lim\limits_{n\to\infty}(n) = \infty$

กรณี **รูปแบบไม่กำหนด** $(\textit{indeterminate from})$ เช่น $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ ให้ทำการจัดรูปก่อนหาลิมิต

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

ตัวอย่าง 1 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = 5$

ตัวอย่าง 2 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ และ ลิมิตของลำดับ $b_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

ตัวอย่าง 3 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$

ตัวอย่าง 4 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{3+2n}{n}$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

ตัวอย่าง 5 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \dfrac{3n^3 - n}{5n^3 + 7}$

ตัวอย่าง 6 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \dfrac{5^n + 3^{n+1}}{4^n + 5^{n-1}}$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

ตัวอย่าง 7 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \dfrac{3+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-2}$

ตัวอย่าง 8 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{2^n+3^n}$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

แบบฝึกหัด 1.1

จงเขียนสี่พจน์แรกของลำดับซึ่งกำหนดพจน์ที่ n ให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งตรวจดูแต่ละลำดับว่า ลำดับใดบ้างที่เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ ถ้าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ให้หาลิมิตด้วย

1) $a_n = \dfrac{2}{3n}$

....

....

....

....

2) $a_n = \dfrac{3n-2}{3n}$

....

....

....

....

3) $a_n = \dfrac{3n+5}{6}$

....

....

....

....

4) $a_n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

....

....

....

....

5) $a_n = \dfrac{4n^2-2n+3}{n^2}$

....

....

....

....

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

6) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

....

....

....

....

7) $a_n = \dfrac{4+5n}{n^2}$

....

....

....

....

8) $a_n = n\left(1+\left(-1\right)^n\right)$

....

....

....

....

....

9) $a_n = sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

....

....

....

....

....

10) $a_n = \dfrac{1}{n}\cdot sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

....

....

....

....

....

....

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

แบบฝึกหัด 1.2

จงหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้

1) $a_n = \sqrt[5]{7} + 2$

2) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

3) $a_n = \frac{3n-4}{5n+7}$

4) $a_n = \frac{3n^2+5}{4n-6}$

5) $a_n = \frac{2n-11}{n^2+9}$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

6) $a_n = \frac{4n^2}{n^2} - \frac{1}{5}$

....

....

....

....

....

7) $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n^7-1}{2-3n^7}\right)$

....

....

....

....

....

....

....

8) $a_n = \frac{4+5n}{n^2}$

....

....

....

....

....

....

....

9) $a_n = \frac{25n^{200}-50n^{75}}{75n^{125}+5n^{200}}$

....

....

....

....

....

....

....

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

10) $a_n = \frac{5n^2}{2n+1} + \frac{2\sqrt{n}}{5n}$

11) $a_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{5n}$

12) $a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n}{n-1}$

13) $a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n-1}$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

14) $a_n = \dfrac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{2n}+\sqrt{n+5}}$

15) $a_n = \dfrac{5^n - 3^{n-1}}{2\cdot 5^{n-3} + 3^n}$

16) $a_n = \dfrac{5^n + n^{10}}{2\cdot 5^n + 3^n}$

17) $a_n = \dfrac{2^{2n} + 3^n + n^3}{0.5^n + n^5}$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

1.3 อนุกรม

นักเรียนได้ทราบถึงความสัมพันธ์ระหว่างลำดับและอนุกรมมาแล้วดังนี้

บทนิยาม	เมื่อ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ เป็นลำดับจำกัด และ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ เป็นลำดับอนันต์ เรียก การแสดงผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับ ในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ หรือ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ ว่า อนุกรม เรียกอนุกรมที่ได้จากลำดับจำกัด ว่า “อนุกรมจำกัด” $(\textit{Finite series})$ และ เรียกอนุกรมที่ได้จากลำดับอนันต์ ว่า “อนุกรมอนันต์” $(\textit{Infinite series})$

จากบทนิยาม จะได้ว่า อนุกรมที่เขียนในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ เป็นอนุกรมจำกัด

และ อนุกรมที่เขียนในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ เป็นอนุกรมอนันต์

สำหรับ อนุกรมรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ หรือ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ จะเรียกพจน์ต่างๆ ดังนี้

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของลำดับ หรือพจน์แรกของลำดับ

เรียก a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของลำดับ

เรียก a_3 ว่า พจน์ที่ 3 ของลำดับ

. . .

เรียก a_n ว่า พจน์ที่ n ของลำดับ หรือ พจน์ทั่วไปของลำดับ

<u>ตัวอย่างของอนุกรม</u>

(1) $2+5+10+17+\cdots+101$ เป็นอนุกรมจำกัด ที่ได้จากลำดับ $2, 5, 7, 10, 17, ... , 101$

(2) $1+8+27+64+\cdots+1331+\cdots$ เป็นอนุกรมอนันต์ ที่ได้จากลำดับ $1, 8, 27, 64, ... , 1331, ...$

สัญลักษณ์แทนการบวก $(\textit{Summation Notation})$

เพื่อความสะดวกในการเขียนอนุกรม จะใช้อักษรกรีก $\sum$ $(\textit{sigma})$ อ่านว่า “ซิกมา” เป็นสัญลักษณ์แทนการบวก

โดยจะเขียนแทน $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ ด้วย $\sum_{i=1}^{n} a_i$ (อ่านว่า การบวก a_i เมื่อ $i = 1$ ถึง $i = n$)

และเขียนแทน $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ ด้วย $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ (อ่านว่า การบวก a_i เมื่อ $i = 1$ ขึ้นไป)

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

ตัวอย่าง

1) $\sum_{x=0}^{5}(2x+1)=$

2) $\sum_{y=4}^{8}2^{y}=$

3) $\sum_{i=1}^{\infty}2=$

4) $\sum_{t=1}^{\infty}t^{t}=$

อนุกรมใดก็ตามที่เป็นอนุกรมจำกัด อนุกรมนั้นย่อมแทนได้ด้วยจำนวนใดจำนวนหนึ่ง เช่น

1) $\sum_{i=1}^{4}(2i+1)=$

2) $\sum_{k=1}^{5}(k^{2}-1)^{2}=$

สมบัติของ $\sum$ $(Sigma)$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

1. $\sum_{i=1}^{n}k=kn$

2. $\sum_{i=1}^{n}ka_{n}=k\sum_{i=1}^{n}a_{n}$

3. $\sum_{i=1}^{n}(a_{n}\pm b_{n})=\sum_{i=1}^{n}a_{n}\pm\sum_{i=1}^{n}b_{n}$

4. $\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n}{2}(n+1)$

5. $\sum_{i=1}^{n}i^{2}=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

6. $\sum_{i=1}^{n}i^{3}=\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^{2}=\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)^{2}$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

พิสูจน์ (เหมาะสำหรับนักเรียนที่สนใจ)

1) จะพิสูจน์ว่าเพราะเหตุใด $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$ ----------(1)

หรือ $\sum_{i=1}^{n} i = n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1$ ----------(2)

(1)+(2) จะได้ $2\sum_{i=1}^{n} i = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n\ terms}$

จะได้ $2\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)$

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$

---

2) จะพิสูจน์ว่าเพราะเหตุใด $\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

เนื่องจาก $\sum_{x=1}^{n} x^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

พิจารณา $(x+1)^3 - x^3 = \cancel{x^3}+3x^2+3x+1-\cancel{x^3}$

นั่นคือ $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2+3x+1$ ----------(*)

แทน $x=1$ ใน(*) จะได้ $2^3-1^3 = 3(1)^2+3(1)+1$ ----------(1)

แทน $x=2$ ใน(*) จะได้ $3^3-2^3 = 3(2)^2+3(2)+1$ ----------(2)

แทน $x=3$ ใน(*) จะได้ $4^3-3^3 = 3(3)^2+3(3)+1$ ----------(3)

$\cdots$

แทน $x=n$ ใน(*) จะได้ $(n+1)^3-n^3 = 3(n)^2+3(n)+1$ ----------(n)

(1)+(2)+(3)+$\cdots$+(n) จะได้

$$(n+1)^3-1 = 3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+\underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{n\ terms}$$

จะได้ $(n+1)^3-1 = 3\left(\sum_{x=1}^{n} x^2\right)+3\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)+(n)$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

$$3\left(\sum_{x=1}^{n} x^2\right) = (n+1)^3 - 1 - 3\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) - (n)$$

$$3\left(\sum_{x=1}^{n} x^2\right) = (n+1)^3 - 3\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) - (n+1)$$

$$3\left(\sum_{x=1}^{n} x^2\right) = (n+1)\left((n+1)^2 - 3\left(\frac{n}{2}\right) - 1\right)$$

$$3\left(\sum_{x=1}^{n} x^2\right) = (n+1)\left(n^2 + 2n \cancel{+1} - \frac{3n}{2} \cancel{-1}\right)$$

$$3\left(\sum_{x=1}^{n} x^2\right) = (n+1)\left(n^2 + \frac{1}{2}n\right)$$

$$3\left(\sum_{x=1}^{n} x^2\right) = n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$3\left(\sum_{x=1}^{n} x^2\right) = \frac{n}{2}(n+1)(2n+1)$$

นั่นคือ $\displaystyle\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

---

3) จะพิสูจน์ว่าเพราะเหตุใด $\displaystyle\sum_{x=1}^{n} x^3 = \left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2 = \left(\sum_{x=1}^{n} x\right)^2$

เนื่องจาก $\displaystyle\sum_{x=1}^{n} x^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

พิจารณา $(x+1)^4 - x^4 = \cancel{x^4} + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \cancel{- x^4}$

นั่นคือ $(x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ ----------(*)

แทน $x = 1$ ใน(*) จะได้ $\cancel{2^4} - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$ ----------(1)

แทน $x = 2$ ใน(*) จะได้ $\cancel{3^4} - \cancel{2^4} = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$ ----------(2)

แทน $x = 3$ ใน(*) จะได้ $\cancel{4^4} - \cancel{3^4} = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$ ----------(3)

$$\vdots$$

แทน $x = n$ ใน(*) จะได้ $(n+1)^4 - \cancel{n^4} = 4(n)^3 + 6(n)^2 + 4(n) + 1$ ----------(n)

(1)+(2)+(3)+$\cdots$+(n) จะได้

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

$$(n+1)^4-1=4\left(\sum_{x=1}^{n}x^3\right)+6\left(\sum_{x=1}^{n}x^2\right)+4\left(\sum_{x=1}^{n}x\right)+\left(\sum_{x=1}^{n}1\right)$$

$$(n+1)^4-1=4\left(\sum_{x=1}^{n}x^3\right)+\cancel{6}\left(\frac{n}{\cancel{6}}(n+1)(2n+1)\right)+4\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)+(n)$$

$$(n+1)^4=4\left(\sum_{x=1}^{n}x^3\right)+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+(n+1)$$

$$4\left(\sum_{x=1}^{n}x^3\right)=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)$$

$$4\left(\sum_{x=1}^{n}x^3\right)=(n+1)\left((n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\right)$$

$$4\left(\sum_{x=1}^{n}x^3\right)=(n+1)\left(n^3+3n^2\cancel{+3n}+\cancel{1}-2n^2\cancel{-n-2n}-\cancel{1}\right)$$

$$4\left(\sum_{x=1}^{n}x^3\right)=(n+1)\left(n^3+n^2\right)$$

$$4\left(\sum_{x=1}^{n}x^3\right)=n^2(n+1)(n+1)$$

$$\sum_{x=1}^{n}x^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

นั่นคือ $$\sum_{x=1}^{n}x^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\left(\sum_{x=1}^{n}x\right)^2$$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

1.4 ผลบวกของอนุกรมอนันต์

ผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของอนุกรมจำกัดย่อมหาค่าได้แน่นอนเสมอแม้ว่าจะหาไม่ได้โดยใช้สูตร ก็อาจจะหาได้โดยการบวกทีละพจน์ (ซึ่งหากมีจำนวนพจน์มากอาจจะต้องใช้เวลาในการบวกมากด้วย) ส่วนอนุกรมอนันต์การจะหาผลบวกของพจน์ทุกพจน์ให้ได้ค่าที่แน่นอนย่อมทำได้ยากทั้งนี้เพราะไม่อาจหาพจน์สุดท้ายได้

พิจารณาอนุกรม $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$

ถ้าให้ S_n เป็นผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1+a_2$$
$$S_3 = a_1+a_2+a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

เรียก $s_1, s_2, s_3, \ldots$ หรือ $(a_1), (a_1+a_2), (a_1+a_2+a_3), \ldots$ แต่ละจำนวนว่า ***ผลบวกย่อย*** $(partial\ sum)$ ของอนุกรม $a_1+a_2+a_3+\cdots$

และเรียก $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ ว่า ***ลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม***

เช่น จากอนุกรม $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots$ จะได้

$$S_1 = \frac{1}{10}$$
$$S_2 = \frac{1}{10}+\frac{1}{100}=\frac{11}{100}$$
$$S_3 = \frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}=\frac{11}{100}+\frac{1}{1000}=\frac{111}{1000}$$
$$\vdots$$
$$S_n = \frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{10^n}=\frac{10^n-1}{9(10^n)}$$

ลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots$ คือ $\frac{1}{10}, \frac{11}{100}, \frac{111}{1000}, \ldots, \frac{10^n-1}{9(10^n)}, \ldots$

เมื่อหาลิมิตของลำดับนี้ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10^n-1}{9(10^n)}\right)=\frac{1}{9}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10^n-1}{10^n}\right)=\frac{1}{9}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=\frac{1}{9}$

จากตัวอย่างจะเห็นว่า $\frac{1}{9}$ เป็น ลิมิตของลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots$

เรียก $\frac{1}{9}$ ว่าเป็น ***ผลบวกของอนุกรมอนันต์*** นี้

ถ้าพิจารณาอนุกรม $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$ จะได้ ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้คือ $1, 0, 1, 0, \ldots$ ซึ่งเห็นได้ว่า ลำดับนี้ไม่มีลิมิต จึงถือว่า หาผลบวกของอนุกรมนี้ไม่ได้

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

ดังนั้น จึงให้นิยามผลบวกของอนุกรมอนันต์ ดังนี้

บทนิยาม ผลบวกของอนุกรมอนันต์ใด คือ ลิมิตของลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมนั้น เมื่อลำดับนั้นมีลิมิต

สำหรับอนุกรมอนันต์ที่ สามารถหาผลบวกได้ เรียกว่า ***อนุกรมคอนเวอร์เจนต์*** และเรียก อนุกรมอนันต์ที่ ไม่สามารถหาผลบวกได้ ว่า ***อนุกรมไดเวอร์เจนต์***

ตัวอย่าง 9 จงพิจารณาว่า อนุกรม $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรืออนุกรมไดเวอร์เจนต์ และถ้าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ จงหาผลบวกของอนุกรมนี้

ตัวอย่าง 10 จงพิจารณาว่า $\sum_{i=1}^{\infty}(2i-1)$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรืออนุกรมไดเวอร์เจนต์ และถ้าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ จงหาผลบวกของอนุกรมนี้

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า การแสดงว่าอนุกรมอนันต์ใดจะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรืออนุกรมไดเวอร์เจนต์ทำได้ดังนี้

1) หาลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม

2) พิจารณาลิมิตของลำดับผลบวกย่อย ถ้าลำดับผลบวกย่อยนั้นมีลิมิต จะได้ว่าอนุกรมนั้นเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แต่ถ้าลำดับผลบวกย่อยนั้นไม่มีลิมิต จะได้ว่าอนุกรมนั้นเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

<u>ข้อสังเกต</u> ผลบวกของอนุกรมอนันต์ คือ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(S_n)$

ในกรณีที่อนุกรมอนันต์เป็นอนุกรมเรขาคณิต จาก $a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1} + \cdots$

เมื่อพิจารณาที่ อัตราส่วนร่วม (r) จะแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ $|r| = 1$, $|r| \neq 1$

กรณี $|r| = 1$ พิจารณาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม

ถ้า $r = 1$ จะได้ลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมเป็น $(a_1), (a_1 + a_2), (a_1 + a_2 + a_3), \ldots$

ซึ่งก็คือ a_1 , $2a_1$, $3a_1$, ... , na_1 , ... นั่นคือไม่มีลิมิต

ถ้า $r = -1$ จะได้ลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมเป็น $(a_1), (a_1 + a_2), (a_1 + a_2 + a_3), \ldots$

ซึ่งก็คือ a_1 , 0 , a_1 , 0 , ... นั่นคือไม่มีลิมิต

กรณี $|r| \neq 1$ จะได้ $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a_1}{1-r} - \dfrac{a_1r^n}{1-r}$

ถ้า $|r| > 1$ เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด r^n จะเข้าใกล้อนันต์

จะได้ $\lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_1}{1-r} - \dfrac{a_1r^n}{1-r}\right) = -\infty$ นั่นคือไม่มีลิมิต

ถ้า $|r| < 1$ เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด r^n จะเข้าใกล้ 0

จะได้ $\lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_1}{1-r} - \dfrac{a_1r^n}{1-r}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_1}{1-r}\right) = \dfrac{a_1}{1-r}$

นั่นคือ ลิมิตของลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมเรขาคณิต เมื่อ $|r| < 1$ คือ $\dfrac{a_1}{1-r}$

<u>ข้อสรุปเกี่ยวกับอนุกรมอนันต์ ที่เป็น อนุกรมเรขาคณิต</u>

เมื่อ a_1 เป็นพจน์แรกของอนุกรม และ r เป็นอัตราส่วนร่วมของอนุกรมนี้

1) ถ้า $|r| \geq 1$ แล้วอนุกรมนี้เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

2) ถ้า $|r| < 1$ แล้วอนุกรมนี้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และถ้าให้ S เป็นผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตที่เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ จะได้ $S = \lim_{n\to\infty}(S_n) = \dfrac{a_1}{1-r}$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

<u>ตัวอย่าง 11</u> จงหาผลบวกของอนุกรม $16+12+9+\cdots+16\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+\cdots$

แบบฝึกหัด 1.3

1) จงพิจารณาอนุกรมในแต่ละข้อต่อไปนี้ ว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรืออนุกรมไดเวอร์เจนต์ และถ้าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ จงหาผลบวกของอนุกรมด้วย

1.1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\cdots+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots$

1.2) $3+2+\frac{4}{3}+\cdots+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\cdots$

1.3) $\frac{2}{3}+\frac{10}{3}+\frac{50}{3}+\cdots+\frac{2}{3}\cdot(5)^{n-1}+\cdots$

1.4) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\cdots$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

1.5) $3+3+3+\cdots$

1.6) $2+(-1)+(-4)+\cdots+(5-3n)+\cdots$

1.7) $\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^{n}+\cdots$

1.8) $1+\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}+\cdots$

1.9) $\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\frac{16}{625}+\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}+\cdots$

1.10) $2+5+10+\cdots+\left(n^{2}+1\right)+\cdots$

1.11) $-1+0+9+\cdots+\left(n^{3}-2n^{2}\right)+\cdots$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

1.12) $\frac{1}{10}-\frac{1}{100}+\frac{1}{1,000}-\frac{1}{10,000}+\cdots+\frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}+\cdots$

1.13) $100+10+1+0.1+\cdots$

1.14) $1+10+100+1,000+\cdots$

2) อนุกรม $1-2+3-4+5-6+\cdots$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์หรืออนุกรมคอนเวอร์เจนต์

3) จงหาค่าของ x ถ้า $1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{2}{3}$

4) จงหาค่าของ a_1 และ r เมื่อ $a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\cdots=\frac{2}{3}$

และ $a_1-a_1r+a_1r^2-a_1r^3+\cdots=\frac{3}{4}$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

5) รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งมีด้านยาวด้านละ 10 นิ้ว รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่สองเกิดจากการต่อจุดกึ่งกลางด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปแรก และ รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่สามเกิดจากการต่อจุดกึ่งกลางด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่สอง เช่นนี้เรื่อยๆ ไป จงหาผลบวกความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด ถ้ากระบวนการนี้เกิดต่อเนื่องไปไม่มีที่สิ้นสุด

6) ปล่อยลูกบอลลูกหนึ่งสูงจากพื้น 2 เมตร ทุกครั้งที่ลูกบอลกระดอนขึ้นลูกบอลจะลอยสูงขึ้นเป็นระยะ 3 ใน 5 ของความสูงเดิม จงหาระยะทางทั้งหมดที่ลูกบอลเคลื่อนที่จนกระทั่งหยุดนิ่ง

1.5 ทศนิยมซ้ำกับเศษส่วน

เราสามารถเขียนแทนทศนิยมซ้ำ (*repeating decimal*) ให้อยู่ในรูปเศษส่วน (*fraction*) โดยใช้ความรู้เรื่องอนุกรมอนันต์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 12</u> จงหา $0.\dot{7}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

<u>ตัวอย่าง 13</u> จงหา $5.4\dot{2}\dot{7}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

แบบฝึกหัด 1.4

จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของเศษส่วน

1) $0.\dot{1}\dot{8}$

....

....

2) $0.1\dot{2}3\dot{4}$

....

....

....

3) $9.8\dot{7}$

....

....

....

4) $1.3\dot{5}\dot{7}$

....

....

....

5) $0.1\dot{5}9\dot{2}$

....

....

....

6) $0.\dot{9}$

....

....

....

7) $4.\dot{9}$

....

....

....

8) $1.72\dot{9}$

....

....

....

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อ่ามรัตนชัย

1.6 อนุกรมเทเลสโคปิค

เทคนิคการ “ส่อง” พจน์รอบข้างมาหักล้างกัน (*Telescope* = กล้องส่อง) โดยการจัดรูปแต่ละพจน์ในอนุกรมให้เป็น “ผลลบ” โดยเมื่อแยกเป็นผลลบได้แล้ว เราจะหวังว่า พจน์คู่ที่อยู่ติดกันจะมีบางตัวตัดกันได้

วิธีจัดรูปพจน์ให้เป็นผลลบ จะมีอยู่ 2 วิธี คือ การใช้คอนจูเกต กับ การแยกเศษส่วน

รูปแบบการแยกเศษส่วนที่เจอบ่อย

$$\frac{1}{ab}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{b-a}\right)\ ,\ \frac{1}{abc}=\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}\right)\cdot\left(\frac{1}{c-a}\right)\ ,\ \frac{1}{abcd}=\left(\frac{1}{abc}-\frac{1}{bcd}\right)\cdot\left(\frac{1}{d-a}\right)$$

<u>ตัวอย่าง 14</u> จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}$

<u>ตัวอย่าง 15</u> จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i)(i+1)}$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

แบบฝึกหัด 1.5

1) จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

1.1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$

1.2) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$

1.3) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

1.4) $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2}+\frac{5}{2^2 \cdot 3^2}+\frac{7}{3^2 \cdot 4^2}+\cdots$

1.5) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$

2) จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมต่อไปนี้

2.1) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

2.2) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n(n+1)(n+2)$

2.3) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$

3) ถ้าพจน์ที่ n ของอนุกรมหนึ่งเป็น n^3+3^n จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย

4) จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

4.1) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\cdots$

4.2) $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{9}-\frac{4}{27}+\cdots$

4.3) $1+\frac{3}{4}+\frac{5}{16}+\frac{7}{64}+\cdots$

จัดทำโดย อ.เจนณรงค์ อร่ามรัตนชัย